

Grafs, amics i coneguts

CRISTINA DALFÓ I MIQUEL À. Fiol

Resum Com és ben sabut, un graf és un objecte matemàtic que modelitza l'existència d'una certa relació entre parells d'elements d'un conjunt donat. Aleshores, és natural que molts dels primers resultats sobre grafs facin referència a relacions entre persones o grups de persones. En aquest article, comentem quatre resultats d'aquest tipus, els quals tenen relació amb diverses teories generals de grafs i les seves aplicacions: el lema de les encaixades de mans (relacionat amb la coloració de grafs i l'àlgebra booleana), un lema sobre els coneguts i desconeguts en una festa (amb la teoria de Ramsey), un lema sobre els amics en comú (amb la distància-regularitat i la teoria de codis) i el teorema de les noces de Hall (amb la connectivitat de les xarxes). Aquestes quatre àrees de la teoria de grafs, amb problemes sovint fàcils de plantejar però molt difícils de resoldre, s'han desenvolupat extensament i actualment són motiu de nombrosos treballs de recerca. Com a exemples de resultats i problemes representatius d'aquestes àrees, els quals són motiu de discussió en aquest treball que presentem, podem citar els següents: el teorema dels quatre colors (T4C), els nombres de Ramsey, els problemes d'existència de grafs distància-regulars i de codis completament regulars i, finalment, l'estudi de les propietats topològiques de les xarxes d'interconnexió.

Paraules clau: graf, coloració d'arestes, àlgebra booleana, teoria de Ramsey, distància-regularitat, teoria espectral, codi completament regular, teorema de les noces de Hall, teorema de Menger.

Classificació MSC2010: 05C50, 05C05.

1 Introducció

Un graf $G = (V, E)$ és una estructura matemàtica que consisteix en un conjunt de vèrtexs V i un conjunt d'arestes E (o parells no ordenats de vèrtexs). Normalment, cada vèrtex $v \in V$ està representat per un punt i cada aresta $e = \{u, v\} \in E$ per una línia que uneix els vèrtexs u i v . La teoria de grafs forma part de la combinatòria, la qual és la part de les matemàtiques que estudia l'estructura i l'enumeració d'objectes discrets, en contraposició als

objectes continus estudiats en l'anàlisi matemàtica. En particular, la teoria de grafs és útil per estudiar qualsevol sistema amb una certa relació entre parelles d'elements, cosa que dóna una relació binària. Per tant, no és gaire sorprenent que molts dels problemes i resultats originals facin referència a relacions entre persones. Per exemple, un dels resultats més simples és el lema de les encaixades de mans: *En una festa, un nombre parell de persones fan un nombre senar d'encaixades de mans*. També hi ha l'anomenat teorema de l'amistat: *En una festa, si cada parell de persones té exactament un amic en comú, aleshores hi ha algú que és amic de tothom*. La primera demostració d'aquest darrer teorema, i la més famosa, és de Paul Erdős (amb Alfred Rényi i Vera Sós), un matemàtic hongarès, probablement el més prolífic del segle xx, a qui, com a Euler, li agradava fer sentències com *A mathematician is a device for turning coffee into theorems* («Un matemàtic és un dispositiu que transforma cafè en teoremes») o *Another roof, another proof* («Un altre sostre, una altra demostració»). En la segona, mostrava la gran capacitat i predisposició que tenia per col·laborar amb altres matemàtics de tot el món (va tenir cinc-cents nou coautors). D'aquí ve el *nombre d'Erdős*: els coautors d'Erdős tenen nombre d'Erdős 1, els coautors dels coautors tenen nombre d'Erdős 2, etc. Per tenir més informació sobre Erdős, vegeu Hoffman [28].

Es considera que el primer article en teoria de grafs es va publicar el 1736. El seu autor és el gran matemàtic suís Leonhard Euler, de qui es diu que escrivia articles en la mitja hora entre el primer i el segon avís per dinar. Aquest primer article és sobre un camí a través dels ponts de Königsberg; vegeu Euler [12]. Aquesta ciutat era la capital de Prússia Oriental, on va néixer Immanuel Kant, i que avui correspon a la ciutat russa de Kaliningrad. El problema dels ponts de Königsberg està relacionat amb el trencaclosques de dibuixar una figura sense aixecar el llapis del paper i sense passar dos cops pel mateix lloc. En el problema original, es demanava si era possible caminar per la ciutat creuant cadascun dels ponts només una vegada. Amb un argument enginyós que, de fet, no utilitzava de manera explícita cap graf, Euler va demostrar la impossibilitat d'aquest recorregut.

Un altre dels problemes més famosos en teoria de grafs, que Appel, Haken i Kock [2, 3] no van resoldre fins al 1977, és el teorema dels quatre colors (T4C), el qual afirma que els països d'un mapa dibuixat en un pla es poden acolorir amb quatre colors, de manera que països amb una frontera comuna (diferent d'un punt) tinguin colors diferents. Es considera que aquest teorema va ser el primer resultat important que va ser provat mitjançant un ordinador, ja que en una part de la demostració s'analitzen computacionalment 1.482 configuracions. Per aquest motiu no tots els matemàtics l'accepten. Vint anys més tard, Robertson, Sanders, Seymour i Thomas [37] van donar una demostració independent i més curta, però que també requereix l'ús de l'ordinador, ja que s'analitzen 633 configuracions.

Com ja hem dit, la teoria de grafs s'utilitza per estudiar diferents relacions. Un primer exemple pot ser un circuit elèctric, amb tots els seus components i les seves connexions. En sistemes de telecomunicacions, la teoria de grafs

contribueix a modelitzar, dissenyar i estudiar les xarxes d'interconnexió o comunicació. Per exemple, les xarxes d'interconnexió s'utilitzen en sistemes de multiprocessadors, on algunes unitats tenen la tasca d'intercanviar-se la informació, i en xarxes locals, amb diferents ordinadors situats a prop els uns dels altres comunicant-se a gran velocitat. Pel que fa a les xarxes de comunicacions, actualment l'exemple més important és Internet, que permet la comunicació i l'intercanvi de dades entre ordinadors de tot el món. De fet, estem experimentant una revolució de les comunicacions, de manera que podem dir que estem «teixint» la xarxa de comunicacions.

Per a més detalls sobre notació, conceptes bàsics i la història de la teoria de grafes, vegeu, per exemple, Bollobás [6], Diestel [10], West [40] i Biggs, Lloyd i Wilson [5].

2 Encaixades de mans: coloracions i àlgebra booleana

Diem que, en un graf $G = (V, E)$, el grau $\delta(u)$ és el nombre de vèrtexs adjacents al vèrtex u , és a dir, el nombre d'arestes incidents a u . Denotem per $\Delta(G)$ el grau màxim de tots els vèrtexs de G i per $\delta(G)$ el grau mínim.

Comencem amb un dels resultats més simples sobre grafes, el qual afirma que la suma dels graus del conjunt de vèrtexs V d'un graf G és igual al doble del nombre d'arestes E :

$$\sum_{u \in V} \delta(u) = 2|E|, \quad (1)$$

ja que en comptar el grau comptem cada aresta dues vegades perquè cada aresta és incident a dos vèrtexs. D'aquí obtenim les desigualtats:

$$\delta(G)|V| \leq 2|E| \leq \Delta(G)|V|. \quad (2)$$

Malgrat que aquests resultats són aparentment trivials, tenen alguns corollaris interessants, com els següents:

- a) *Tot graf té un nombre parell de vèrtexs amb grau senar.*

Aquest és l'anomenat lema de les encaixades de mans, perquè es pot enunciar com: *En una festa, el nombre de persones que encaixen un nombre senar de mans és sempre parell.*

- b) *Tot graf δ -regular (un graf és δ -regular si tots els seus vèrtexs tenen grau δ), amb δ senar, té un nombre parell de vèrtexs.*

- c) *En un graf planari (és a dir, que es pot dibuixar en el pla sense que les arestes es creuin) amb coll g (el coll és la longitud del cicle més curt) i nombre d'arestes $|E|$ es compleix que*

$$|E| \leq \frac{g(|V| - 2)}{g - 2}. \quad (3)$$

Per demostrar c necessitem la famosa fórmula d'Euler [13] publicada entre el 1752 i el 1753, però que ja va ser observada per Descartes el 1640, la qual

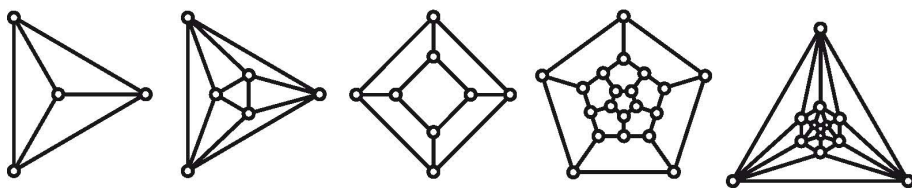


FIGURA 1: Els grafs dels cinc sòlids platònics.

es pot demostrar per inducció i afirma que en un graf planari amb $n = |V|$ vèrtexs, $m = |E|$ arestes i $r = |R|$ regions, es compleix que

$$r + n = m + 2. \quad (4)$$

En aquesta fórmula, el nombre de regions inclou la regió exterior (és a dir, el *mar*, si tenim un mapa o si el graf és sobre d'una esfera). Per exemple, els grafs dels sòlids platònics, il·lustrats a la figura 1, compleixen la fórmula d'Euler. De fet, aquesta fórmula dona condicions necessàries per a l'existència d'aquests políedres regulars (vegeu Rademacher i Toeplitz [35]).

En la fórmula d'Euler es pot interpretar el nombre r de regions com la cardinalitat del conjunt de vèrtexs del graf dual G^* . Donat un graf planari G amb $n = |V|$ vèrtexs i $m = |E|$ arestes formant regions, el seu graf *dual* $G^* = (V^*, E^*)$ té vèrtexs que representen les regions de G i hi ha una aresta entre dos vèrtexs si les corresponents regions de G són veïnes. Per tant, $r = |V^*|$ i $m = |E| = |E^*|$. Aquesta interpretació dona una fórmula d'Euler més simètrica:

$$|E^*| = (|V^*| - 1) + (|V| - 1) = |E|, \quad (5)$$

la qual es pot demostrar sense utilitzar inducció, identificant els dos parèntesis de l'equació (5) com el nombre d'arestes de dos arbres generadors T^* i T de G^* i G , respectivament. Un *arbre generador* T d'un graf *connex* $G = (V, E)$ (és a dir, tal que hi ha algun camí entre qualsevol parell de vèrtexs) està format pel conjunt de vèrtexs V i $|V| - 1$ arestes sense que es formin cicles. Això està representat a la figura 2, on les arestes negres i contínues de G (el graf d'un cub) pertanyen a T , mentre que les arestes negres discontinües corresponen a les arestes de T^* en G^* (el graf d'un octàedre). Per a més detalls, vegeu Aigner i Ziegler [1].

Aleshores, la demostració de c és com segueix: com que cada aresta és la frontera de dues regions i cada regió té almenys g arestes, s'ha de complir que $r \leq 2m/g$. Observem que aquesta desigualtat s'obté a partir de (2), considerant el graf dual, ja que $r = |V^*|$, $m = |E^*|$ i $g = \delta(G^*)$. Utilitzant aquesta desigualtat i l'equació (4), obtenim (3).

Com un cas particular de c , tenim el resultat següent:

- d) En un graf planari ($g \geq 3$) el nombre d'arestes satisfà $m \leq 3n - 6$ i, si no conté triangles ($g \geq 4$), aleshores satisfà $m \leq 2n - 4$.

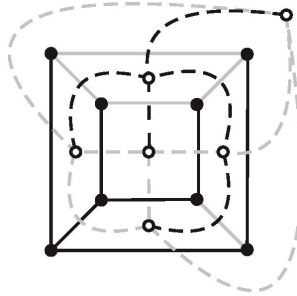


FIGURA 2: Un arbre generador (arestes negres) del graf d'un cub (arestes contínues i vèrtexs negres) i el seu arbre dual (arestes discontinuïques i vèrtexs blancs).

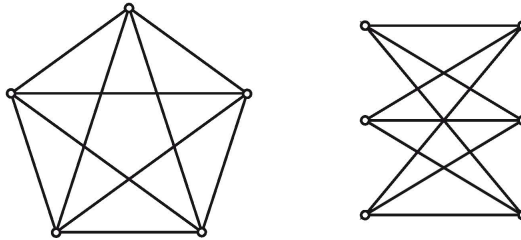


FIGURA 3: El graf complet K_5 i el graf bipartit complet $K_{3,3}$.

De la primera desigualtat, podem veure que el graf complet K_5 ($n = 5$, $m = 10$) no és planari. Diem que un graf és *complet* si hi ha una aresta entre qualsevol parell de vèrtexs. De forma similar amb la segona desigualtat, veiem que el graf bipartit complet $K_{3,3}$ ($n = 6$, $m = 9$) tampoc no és planari. Un graf *bipartit* (és a dir, tal que el conjunt de vèrtexs es pot descompondre en dos subconjunts disjunts tals que els vèrtexs d'un subconjunt no són adjacents entre si) és *complet* quan cada parell de vèrtexs en subconjunts diferents són adjacents. Vegeu tots dos grafos a la figura 3.

En aquest context, cal esmentar el famós teorema de Kuratowski [31] que caracteritza els grafos planaris (vegeu també el llibre de West [40, p. 246–251] i l'article de Thomassen [39], on es descriu la relació del criteri de planaritat amb el teorema de la corba de Jordan):

- Un graf és planari si i només si no conté cap subgraf homeomorf a K_5 o $K_{3,3}$.

Recordem que un graf H és *homeomorf* a un graf G si H s'ha obtingut substituint cada aresta de G per un camí.

De l'equació (1) i de les desigualtats de d , podem demostrar:

- Tot graf planari conté un vèrtex u de grau $\delta(u) \leq 5$. A més, si no conté triangles, té un vèrtex u de grau $\delta(u) \leq 3$.

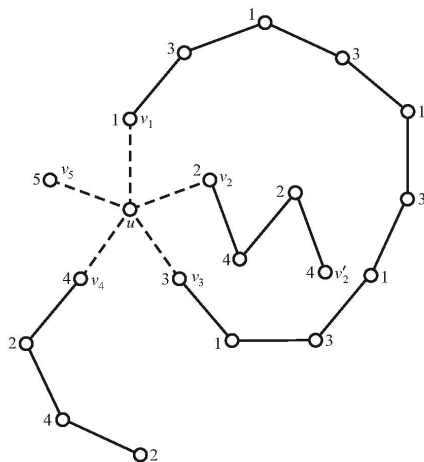


FIGURA 4: El cas $r = \delta = 5$ en la demostració del teorema dels 5 colors (T5C).

En efecte, si n_i denota el nombre de vèrtexs de grau $i \in \mathbb{N}$, aleshores de l'equació (1) tenim que

$$2m = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots \leq 2(3n - 6) = 6n_1 + 6n_2 + 6n_3 + \dots - 12,$$

d'on

$$5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots = 12,$$

de manera que $n_i \geq 0$ per a algun $i \leq 5$, com afirmàvem. La demostració del cas sense triangles és anàloga.

L'existència d'un vèrtex de grau més petit o igual que cinc ens permet provar per inducció el teorema dels cinc colors (T5C), el qual va ser demostrat per primera vegada per Heawood [27]:

- *En tot graf planari, cinc colors són suficients per obtenir una coloració de vèrtexs (en la qual els vèrtexs adjacents han de tenir colors diferents).*

Primer observem que el resultat és trivialment cert per a grafs amb 5 vèrtexs com a màxim. Suposem, doncs, que també és cert per a grafs amb $n - 1 \geq 5$ vèrtexs. Sigui G un graf amb n vèrtexs. Pel que hem vist, G conté un vèrtex $u \in V$ amb grau $\delta \leq 5$. Siguin v_i , $1 \leq i \leq \delta$, els vèrtexs adjacents a u . Per la hipòtesi d'inducció, el graf $G' = G - u$ (obtingut a partir de G eliminant el vèrtex u i totes les seves arestes incidents) té una coloració de vèrtexs amb $r \leq 5$ colors. Aleshores, si $r \leq 4$ (que sempre és el cas quan $\delta \leq 4$), podem restituir el vèrtex u i assignar-li un color diferent dels colors dels vèrtexs adjacents v_i , de manera que obtenim una coloració de G emprant un màxim de 5 colors. D'altra banda, si $r = \delta = 5$, podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que tenim una

situació com la mostrada a la figura 4 (on el vèrtex v_i rep el color i , $1 \leq i \leq \delta$). Considerem ara els camins que tenen vèrtexs acolorits alternativament per 1-3 (amb vèrtexs extrems v_1 i/o v_3) i per 2-4 (amb vèrtexs extrems v_2 i/o v_4). Però com que el graf G' es planari, aquests possibles camins no es poden «creuar» (és a dir, no tenen arestes que es creuin ni vèrtexs en comú). Per tant si, per exemple, existeix el camí 1-3 amb vèrtexs extrems v_1 - v_3 , el camí 2-4 amb extrem v_2 no pot tenir v_4 a l'altre extrem, sinó un altre vèrtex que denotem per v'_2 (vegeu de nou la figura 4). Aleshores, només cal intercanviar els colors 2-4 en aquest camí, de manera que v_2 queda amb el color 4, cosa que ens permet restituir el vèrtex u i donar-li el color 2, obtenint així la coloració de G amb 5 colors.

Considerem ara el cas d'haver d'acolorir amb tres colors les arestes d'un graf G amb grau màxim 3. Això es coneix com a *coloració d'arestes lliure* de G . En particular, la *coloració d'arestes* («no lliure») d'un graf cúbic (o regular de grau 3), també anomenada *coloració de Tait*, correspon al cas en el qual arestes adjacents reben colors diferents. Com veurem després, si G és un graf planari, el problema de l'existència de coloracions de Tait està relacionat amb el teorema dels quatre colors (T4C). A més, veurem que la construcció de grafs cúbics que no poden tenir coloracions de Tait porta a l'àlgebra booleana, la qual s'utilitza normalment per estudiar circuits lògics. Per això, introduïm una generalització natural del concepte de *color*, la qual descriu de manera simple la coloració ($\mathbf{0}$ o $\mathbf{1}$) de qualsevol conjunt d'arestes o, de manera més abstracta, de qualsevol família \mathcal{F} de m colors escollits entre tres colors diferents, per exemple, $C = \{1, 2, 3\}$, de manera que el color $i \in C$ està present m_i vegades. Aquesta situació es pot representar pel vector de coloracions $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, on $m = m_1 + m_2 + m_3$, i diem que \mathcal{F} té una *coloració de Boole* $\mathbf{0}$, denotada per $\Psi(\mathcal{F}) = \mathbf{0}$, quan

$$m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m \pmod{2},$$

mentre que \mathcal{F} té una *coloració de Boole* $\mathbf{1}$ (més concretament $\mathbf{1}_a$), denotada per $\Psi(\mathcal{F}) = \mathbf{1}$ (o bé, $\Psi(\mathcal{F}) = \mathbf{1}_a$), quan

$$m_a + 1 \equiv m_b \equiv m_c \equiv m + 1 \pmod{2},$$

on $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$.

Vegeu Fiol i Fiol [19] per a més informació. D'acord amb aquestes definicions, la coloració de Boole d'una aresta $e \in E$ amb color $a \in C$ és $\Psi(e) = \Psi(\{a\}) = \mathbf{1}_a$; la coloració de Boole d'un vèrtex $v \in V$, denotat per $\Psi(v)$, es defineix com la coloració de Boole de les seves arestes incidents, les quals poden tenir colors diferents o iguals. En aquest context, cal assenyalar els fets següents:

- Si $\delta(v) = 1$, aleshores $\Psi(v) = \mathbf{1}_a$ si i només si l'aresta incident al vèrtex v té color $a \in C$.
- Si $\delta(v) = 2$, aleshores $\Psi(v) = \mathbf{0}$ si i només si les dues arestes incidents al vèrtex v tenen *colors iguals* i $\Psi(v) = \mathbf{1}$ si tenen *colors diferents*.

+	0	1₁	1₂	1₃
0	0	1₁	1₂	1₃
1₁	1₁	0	1₃	1₂
1₂	1₂	1₃	0	1₁
1₃	1₃	1₂	1₁	0

TAULA 1: El grup de Klein de les coloracions de Boole.

- Si $\delta(v) = 3$, aleshores $\Psi(v) = \mathbf{0}$ si i només si les tres arestes incidents al vèrtex v tenen *tres colors diferents*. Per tant, en una coloració de Tait d'un graf cúbic, tots els seus vèrtexs tenen coloració de Boole $\mathbf{0}$.

A més, es pot definir una operació suma de manera natural en el conjunt $\mathcal{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3\}$ de coloracions de Boole de la manera següent: donades les coloracions X_1 i X_2 representades respectivament pels vectors de coloracions $\mathbf{m}_1 = (m_{11}, m_{12}, m_{13})$ i $\mathbf{m}_2 = (m_{21}, m_{22}, m_{23})$, definim la suma $X = X_1 + X_2$ com la coloració representada pel vector de coloracions $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$. D'aquesta manera, $(\mathcal{B}, +)$ és isomorf al grup de Klein, amb $\mathbf{0}$ com a identitat, $\mathbf{1}_a + \mathbf{1}_a = \mathbf{0}$, i $\mathbf{1}_a + \mathbf{1}_b = \mathbf{1}_c$; vegeu la taula 1, on $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$.

Observem que, com que cada element coincideix amb el seu invers, $m\mathbf{1}_a = \mathbf{1}_a + \mathbf{1}_a + \overbrace{\dots}^m + \mathbf{1}_a$ és igual a $\mathbf{0}$ si m és parell, i igual a $\mathbf{1}_a$ si m és senar. D'aquest simple fet, podem deduir el resultat següent (vegeu [17]), el qual és molt útil per al desenvolupament posterior de la teoria i que pot ser vist com una generalització de l'anomenat lema de paritat (vegeu Isaacs [29]):

- *Sigui G un graf amb n vèrtexs, de grau màxim 3, amb una coloració d'arestes lliure, tal que n_i vèrtexs tinguin una coloració de Boole $\mathbf{1}_i$, per a $i \in C$, de manera que $n' = n_1 + n_2 + n_3 \leq n$. Aleshores,*

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv n' \pmod{2}.$$

En efecte, com que la coloració de Boole de cada vèrtex és la suma de les coloracions de Boole de les seves arestes incidents, fent servir de nou l'equació (1), podem escriure

$$\sum_{v \in V} \Psi(v) = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{1}_i + (n - n') \mathbf{0} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{1}_i = \sum_{e \in E} 2\Psi(e) = \mathbf{0},$$

però aquesta igualtat només es compleix si $n_i \mathbf{1}_i = \mathbf{0}$ o $n_i \mathbf{1}_i = \mathbf{1}_i$, per a tot $i \in C$. Aleshores, a partir de $n_1 + n_2 + n_3 = n'$, aconseguim el resultat esperat.

Notem que, com a conseqüència directa, també arribem al resultat següent:

- *No hi ha cap coloració de les arestes d'un graf G que tingui un sol vèrtex amb coloració de Boole $\mathbf{1}$ (i els altres vèrtexs amb coloració de Boole $\mathbf{0}$).*

Una altra conseqüència interessant és el resultat de Tait [38]:

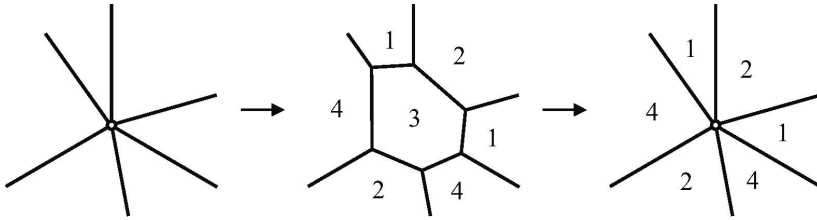


FIGURA 5: Un exemple del fet que tot mapa té un graf cúbic associat.

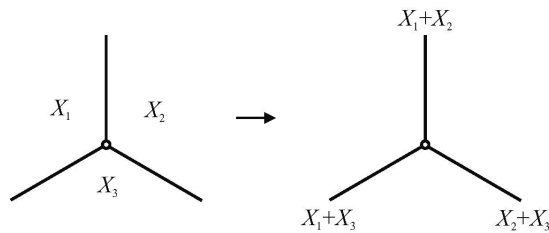


FIGURA 6: Obtenció d'una coloració de Tait d'un graf cúbic.

- *Un graf planari cúbic té una coloració de Tait si i només si el seu mapa corresponent es pot acolorir amb 4 colors.*

Emprant les coloracions de Boole, la demostració d'aquest resultat és com segueix: primer, observem que tot mapa té un graf cúbic associat, perquè si hi ha un vèrtex amb grau més gran que 3, es pot substituir per un polígon, de manera que el mapa obtingut es pot acolorir amb 4 colors i, per tant, el mapa original també; vegeu-ne un exemple a la figura 5. Ara suposem que tenim les regions d'un mapa amb les coloracions $0, 1_1, 1_2, 1_3$. Aleshores, per obtenir una coloració de Tait d'un graf planari cúbic només ens cal assignar a cada aresta la suma de les coloracions de les dues regions separades per aquesta aresta. Per veure que això dóna una coloració de Tait, només hem d'estudiar un vèrtex, com es mostra a la figura 6. Com que tenim un mapa acolorit amb 4 colors, cada dues regions veïnes tenen colors diferents. Per tant, cap de les sumes pot donar 0 . A més, com que les tres regions amb un vèrtex comú tenen coloracions diferents X_1, X_2 i X_3 i $(\mathcal{B}, +)$ és un grup, les coloracions $X_1 + X_2, X_1 + X_3$ i $X_2 + X_3$ també han de ser diferents. A la figura 7 hi ha un exemple d'una coloració amb 4 colors d'un mapa i la seva coloració de Tait (obtinguda a partir de la taula 1), on les coloracions $0, 1_1, 1_2$ i 1_3 es denoten per $0, 1, 2$ i 3 , respectivament.

Al revés, si volem obtenir un mapa acolorit amb 4 colors d'una coloració de Tait de les arestes del graf corresponent, comencem donant la coloració 0 a una

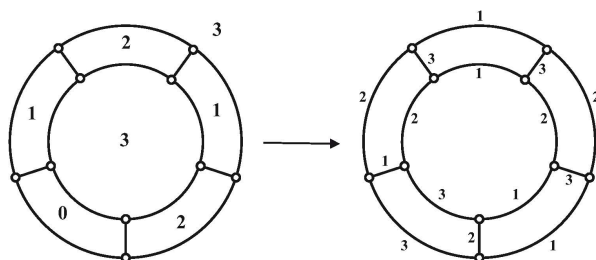


FIGURA 7: La coloració amb 4 colors d'un mapa i la coloració de Tait de les seves arestes.

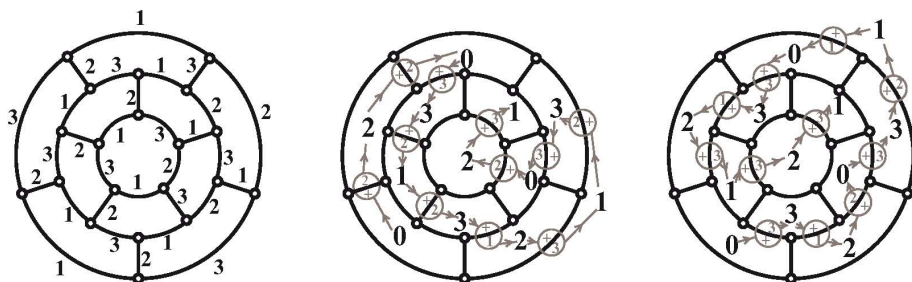


FIGURA 8: Una coloració d'arestes del graf del dodecèdredre (també representat a la figura 1) i dos camins amb les mateixes regions inicial i final.

regió qualsevol que considerarem inicial. Aleshores, des d'aquí, seguim un camí arbitrari a través de totes les regions travessant algunes arestes. A cada nova regió del nostre camí, li donem la coloració obtinguda en sumar la coloració de la regió *anterior* més la coloració de l'aresta que acabem de travessar. Com que cap aresta té la coloració 0 , és obvi que la coloració obtinguda per a cada regió és diferent de la de la seva regió *anterior* en el camí; vegeu un exemple d'aquest procés a la figura 8 (esquerra i centre).

Ara, per acabar la demostració, hem de veure que la coloració d'una regió és independent del camí seguit per arribar-hi. Amb aquesta idea, siguin p_1 i p_2 dos camins amb les mateixes regions inicial i final. Volem demostrar que la coloració obtinguda a la regió final és la mateixa seguint els dos camins; hi ha un exemple d'aquest fet a la figura 8 (centre i dreta). Les coloracions X i Y obtingudes amb els dos camins són iguals si i només si la suma de les coloracions de totes les arestes creuades per p_1 i p_2 és 0 . En efecte, siguin X_1, X_2, \dots, X_s i Y_1, Y_2, \dots, Y_t les coloracions de les arestes creuades respectivament per p_1 i p_2 , aleshores $X_1 + X_2 + \dots + X_s = X$ i $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t = Y$. Si $(X_1 + X_2 + \dots + X_s) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t) = 0$, les sumes en tots dos parèntesis són iguals i, per tant, $X = Y$. Per demostrar aquesta igualtat, podem suposar que $p_1 + p_2$ és una corba simple

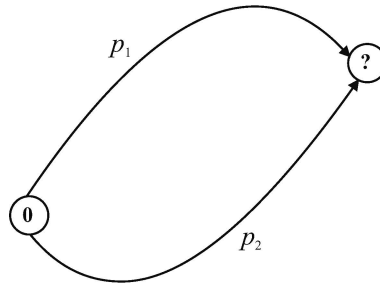


FIGURA 9: Dos camins des d'una regió $\mathbf{0}$ a una altra amb un color desconegut.

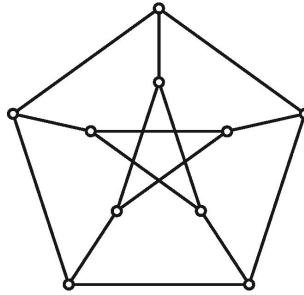


FIGURA 10: El graf de Petersen P .

(vegeu la figura 9), perquè si tingués punts dobles podríem descompondre-la en corbes simples. Si imaginem que tallem el graf amb aquesta corba, obtindrem dos graf, de manera que les coloracions de les arestes creuades per la corba han de complir que $m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \pmod{2}$, on m_i és el nombre d'arestes creuades amb coloració $\mathbf{1}_i$. Aleshores, $(X_1 + X_2 + \dots + X_s) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_s) = m_1 \mathbf{1}_1 + m_2 \mathbf{1}_2 + m_3 \mathbf{1}_3 = \mathbf{0}$, com afirmàvem.

Com hem dit abans, el concepte de coloració ens permet utilitzar l'àlgebra booleana per construir i caracteritzar *snarks*, és a dir, grafos cúbics que no tenen coloracions de Tait, també anomenats de *classe dos*. El nom de *snark* va ser proposat per Gardner [24] a partir d'un poema forassenyat de Lewis Carroll [9]. L'exemple més senzill de *snark* és el graf de Petersen [34] (vegeu la figura 10). Amb les coloracions podem obtenir famílies infinites de *snarks*. Un exemple és la família obtinguda unint adequadament un nombre senar de còpies del *multipol* (graf cúbic amb arestes i semiarestes, les quals són arestes amb un sol vèrtex) que es mostra a la figura 11 (esquerra).

Aquesta estructura funciona com si fos una porta NOT de circuits lògics en el sentit que, una vegada que fem una coloració de Tait de les seves arestes i semiarestes, les coloracions X_1 i X_2 són l'una la conjugada de l'altra, és a dir, $X_2 = \mathbf{0}$ (respectivament, $X_2 = \mathbf{1}$) si i només si $X_1 = \mathbf{1}$ (respectivament, $X_1 = \mathbf{0}$).

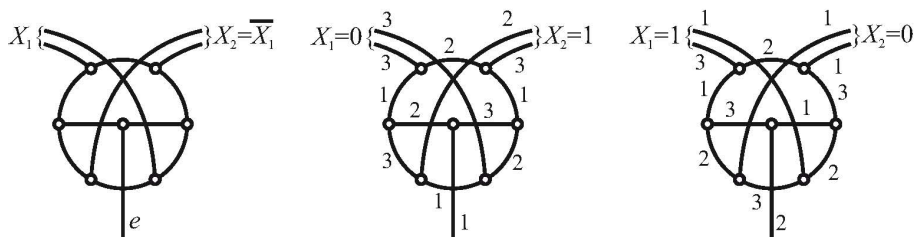
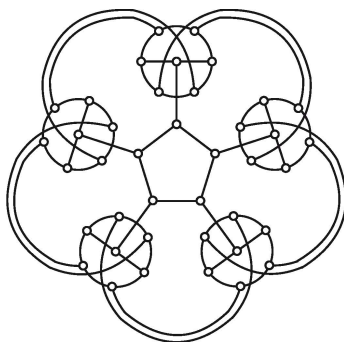


FIGURA 11: Multipols i la porta NOT.

FIGURA 12: *Snark* en forma de flor.

Això es compleix sigui quin sigui el color de la semiaresta e . Dos exemples d'aquest fet es mostren a la figura 11 (centre i dreta). Si, com hem esmentat, unim en una configuració circular un nombre senar d'aquests multipols, afegint vèrtexs addicionals per connectar entre si les semiarestes e , qualsevol intent de fer una coloració de Tait produirà un conflicte i, per tant, el graf és un *snark*. Un exemple concret amb cinc multipols es troba a la figura 12. Aquesta família de *snarks*, anomenats en anglès *flower snarks*, va ser proposada per Loupekhine (vegeu Isaacs [30]). Les primeres famílies infinites de *snarks* van ser proposades per Isaacs [29], però també es poden obtenir utilitzant les coloracions de Boole. Es poden trobar més detalls d'aquesta tècnica a [15].

3 Coneguts i desconeguts: la teoria de Ramsey

Considerem el resultat següent:

- En una festa amb sis persones o més, sempre hi ha tres persones que són mútuament conegudes o desconegudes.

En altres paraules, si acolorim amb dos colors, diguem-ne blau i vermell, les arestes del graf complet K_n amb $n \geq 6$ (coloració d'arestes lliure), aleshores sempre trobem un triangle monocromàtic, o sigui, un subgraf K_3 amb les seves tres arestes blaves o vermelles. En efecte, com que cada vèrtex u té grau 5, com a mínim 3 de les seves arestes incidents $\{u, v_i\}$, $1 \leq i \leq 3$, han de tenir el mateix color, per exemple, blau. Aleshores, si alguna de les 3 arestes $\{v_i, v_j\}$, $1 \leq i < j \leq 3$, té color blau, obtenim un triangle blau. Altrament, tenim un triangle vermell.

Tot i que aquesta demostració és molt senzilla, sol ser molt difícil demostrar resultats similars per a més colors i/o imposant altres subgrafs monocromàtics. En aquest context, recordem que, donats m grafs G_1, G_2, \dots, G_m , el *nombre de Ramsey* $R(G_1, G_2, \dots, G_m)$ es defineix com el nombre n més petit, tal que en qualsevol coloració d'arestes de K_n amb m colors sempre existeixi algun subgraf monocromàtic isomorf a algun G_i . Si G_i és un graf complet K_r , el nombre de Ramsey s'escriu, per simplicitat, substituint K_r per r . Alguns exemples coneguts amb valors exactes (=) i fites (\leq) de nombres de Ramsey són els següents:

$$R(3, 3) = 6, \quad R(3, 4) = 9, \quad R(3, 5) = 14, \quad R(3, 6) = 18, \quad R(4, 4) = 18, \\ R(4, 5) = 25, \quad 43 \leq R(5, 5) \leq 49; \quad R(3, 3, 3) = 17; \quad 51 \leq R(3, 3, 3, 3) \leq 62.$$

Així, el resultat amb el qual hem començat aquesta secció es pot expressar com $R(3, 3) \leq 6$. Com que es pot demostrar que, a més, es compleix que $R(3, 3) \geq 6$ (resulta fàcil acolorir amb dos colors les arestes del graf complet K_5 de manera que no hi hagi triangles monocromàtics), aleshores arribem a $R(3, 3) = 6$. Per a un bon resum actualitzat d'aquest tema, vegeu Radziszowski [36].

Com a exemple, anem a demostrar el resultat següent:

- $R(3, 3, 3) = 17$.

Primer veurem que $R(3, 3, 3) \leq 17$. Fem una coloració d'arestes d'un graf complet amb tres colors; diguem-ne, blau, vermell i verd. Suposem que la coloració d'arestes no té triangles monocromàtics. El veïnatge verd d'un vèrtex v és el conjunt de vèrtexs que tenen una aresta verda que els uneix a v . El veïnatge verd de v no pot contenir cap aresta verda per evitar triangles monocromàtics. Aleshores, la coloració d'arestes del veïnatge verd de v només té dos colors: blau i vermell. Com que $R(3, 3) = 6$, el veïnatge verd de v pot tenir com a màxim 5 vèrtexs. Amb el mateix raonament, els veïnatges blau i vermell de v poden tenir com a màxim 5 vèrtexs cadascun. Com que qualsevol vèrtex diferent de v es troba en el veïnatge verd, blau o vermell de v , aleshores el graf complet pot tenir com a màxim $1 + 5 + 5 + 5 = 16$ vèrtexs. Per tant, $R(3, 3, 3) \leq 17$.

Ara, per demostrar que $R(3, 3, 3) \geq 17$, utilitzarem la teoria algebraica de grafs, la qual es basa en les propietats dels valors propis i vectors propis de la *matriu d'adjacència*, les files i columnes de la qual estan etiquetades

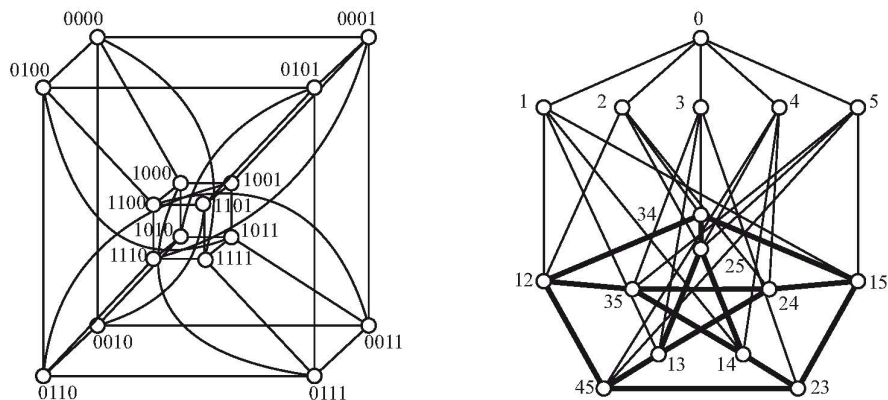


FIGURA 13: El graf de Clebsch en dues perspectives diferents.

pels vèrtexs del graf, i cada component és un 1 o un 0, segons si els vèrtexs corresponents són adjacents o no.

Diem que un graf és $(n, \delta; a, c)$ -fortament regular quan té n vèrtexs, és δ -regular, cada parell de vèrtexs adjacents té a veïns comuns i cada parell de vèrtexs no adjacents té c veïns comuns.

Si $R(3, 3) \geq 17$, aleshores podem colorir les arestes del graf complet K_{16} amb tres colors, és a dir, farem una coloració d'arestes de K_{16} amb 3 colors sense cap triangle monocromàtic. La coloració d'arestes demanada és equivalent a descompondre K_{16} en tres grafs G_1 , G_2 i G_3 , cadascun amb un color. Això implica que cada $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2, 3$, ha de ser un graf amb 16 vèrtexs, regular de grau 5 (ja que cada vèrtex té grau 15 i el seu veïnatge d'un mateix color té com a molt 5 vèrtexs) i sense triangles. A més, com que cada vèrtex $u \in V_i$ té 10 vèrtexs a distància 2, als quals arribem per $5 \cdot 4 = 20$ camins de longitud 2. Aleshores, podem considerar un graf en el qual dos vèrtexs no adjacents qualssevol tinguin dos veïns comuns i dos vèrtexs adjacents no tinguin cap veí comú, és a dir, un graf $(16, 5; 0, 2)$ -fortament regular. Se sap que només hi ha un graf amb aquestes característiques, el graf de Clebsch, el qual es mostra en dues perspectives diferents a la figura 13. A l'esquerra hi ha el graf de Clebsch amb els vèrtexs etiquetats amb els nombres del 0 al 15 en base 2, on dos vèrtexs són adjacents quan les etiquetes corresponents difereixen en un o tots quatre dígit. A la dreta hi ha el graf de Clebsch vist com el graf amb vèrtexs etiquetats $0, i$ i els parells noordenats ij , amb $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, per a $i \neq j$. En aquesta representació, les adjacències ara són $0 \sim i$, $ij \sim i$, $ij \sim j$ i $ij \sim kl$ si i, j, k, l són tots diferents i $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. De fet, el graf de Clebsch és vèrtex-transitiu (és a dir, veiem el mateix graf des de qualsevol vèrtex), de manera que qualsevol vèrtex pot ser escollit com a vèrtex 0. Observem que, en aquesta perspectiva del graf de Clebsch, és evident que el subgraf induït pels deu vèrtexs a distància 2 (del vèrtex escollit com a 0) és el graf de Petersen P [34]; compareu les figures 13 (a la dreta) i 10.

Aleshores, el nostre problema és trobar tres còpies disjuntes en arestes del graf de Clebsch en K_{16} . Per això, presentem la terminologia següent: sigui $G_i = (V, E_i)$ una família de grafes amb el mateix conjunt de vèrtexs V i tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$, per a $i, j = 1, 2, \dots, m$. Definim el graf $G = \bigcup_{i=1}^m G_i$ com el graf $G = (V, E)$, on $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$. Notem que la matriu d'adjacència satisfà $A(G) = \sum_{i=1}^m A(G_i)$. Si denotem amb Cl_i un graf isomorf al graf de Clebsch, el nostre problema ara és el següent: $K_{16} = Cl_1 \cup Cl_2 \cup Cl_3$? En termes de les seves matrius d'adjacències $A_i = A(Cl_i)$, tenim

$$A_1 + A_2 + A_3 = J - I, \quad (6)$$

ja que la matriu d'adjacència de K_{16} és $J - I$, on J és la matriu en la qual totes les components són 1 i I és la matriu identitat.

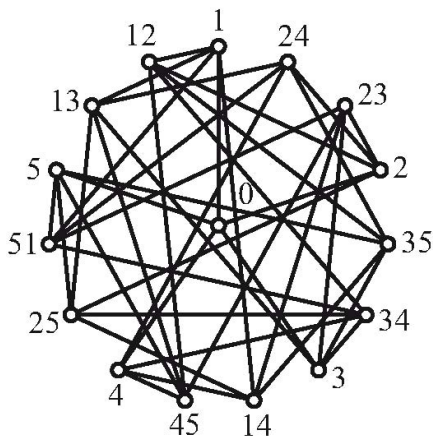
Ara utilitzem tècniques espectrals per tractar l'equació (6). Recordem que l'espectre d'una matriu d'adjacència dóna els valors propis d'aquesta matriu (valors reals, ja que la matriu és simètrica) i que cada valor propi té associat almenys un vector propi. Ara ens cal saber quins són els espectres del graf de Clebsch i del graf complet K_{16} . Podem calcular-los o mirar-los en algun llibre de referència, com el de Godsil i Royle [26]. Aleshores, tenim que $\text{sp } A_i = \{5^1, 1^{10}, -3^5\}$ i $\text{sp}(J - I) = \{15^1, -1^{15}\}$, on els superíndexs indiquen la multiplicitat de cada valor propi. En els dos casos, el valor propi més gran té associat el vector propi \mathbf{j} (amb totes les components iguals a 1), cosa que implica que els vectors propis dels altres valors propis estan en el subespai $\mathcal{H} = \mathbf{j}^\perp$ (amb vectors les components dels quals sumen zero). Denotem per \mathcal{E}_i l'espai propi de A_i corresponent al valor propi 1, és a dir, $\mathcal{E}_i = \ker(A_i - I)$, i considerem el subespai $\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{H}$. Com que $\dim \mathcal{E}_1 = \dim \mathcal{E}_2 = 10$ i $\dim \mathcal{H} = 15$, es compleix que $\dim \mathcal{F} \geq 5$. De l'equació (6), amb $A_1 \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $A_2 \mathbf{v} = \mathbf{v}$ i $(J - I)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, on $\mathbf{v} \in \mathcal{F}$, obtenim que $A_3 \mathbf{v} = -3\mathbf{v}$, de manera que $\dim \mathcal{F} = 5$ i $\mathcal{F} = \ker(A_3 + 3I)$. Això implica que

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3,$$

on $\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_j \cap \mathcal{E}_k$, amb $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Això ens indica que la condició espectral necessària per a l'existència de la descomposició $K_{16} = Cl_1 \cup Cl_2 \cup Cl_3$ se satisfà. En aquest cas, aquesta condició també és suficient i se sap que existeixen exactament dues descomposicions no isomorfes. Una d'elles s'il·lustra a la figura 14, la qual mostra com acolorir un terç de les arestes de K_{16} amb un color utilitzant el graf de Clebsch. Fent una rotació d'aquest graf corresponent als angles $\frac{2\pi}{15}$ i $\frac{4\pi}{15}$, obtenim les arestes que han de ser acolorides amb els altres dos colors; amb això aconseguim $R(3, 3, 3) = 17$.

En cas de voler evitar triangles monocromàtics tenint $m > 3$ colors, no més es coneixen fites dels nombres de Ramsey. Per definició, sigui $C(m) := R(3, 3, \dots, 3) - 1$ per a $m \geq 1$, és a dir, $C(m)$ és l'enter més gran n tal que K_n pugui ser acolorit amb m colors sense triangles monocromàtics. La següent fita superior és coneguda (vegeu Fiol, Garriga i Yebra [22]):

FIGURA 14: $K_{16}/3 =$ graf de Clebsch.

$$\bullet C(m) \leq \lfloor m!e \rfloor. \quad (7)$$

Fixem-nos que, de manera sorprenent, trobem el nombre e . La demostració és com segueix: òbviament, $C(1) = R(3) - 1 = 2$ i sabem que $C(2) = R(3, 3) - 1 = 5$ i $C(3) = R(3, 3, 3) - 1 = 16$. Si calculem $C(3)$ a partir de $C(2)$, considerant que un vèrtex v només pot ser adjacent a $6 + 5 + 5$ vèrtexs, obtenim que $C(3) \leq 3C(2) + 1 = 16$. Aleshores, per a qualsevol $m \geq 1$, tenim la recurrència

$$C(m+1) \leq (m+1)C(m) + 1.$$

Resolem l'equació lineal corresponent

$$D(m+1) = (m+1)D(m) + 1,$$

resolent primer la seva equació homogènia:

$$D(m+1) = (m+1)D(m) \Rightarrow D(m) = K m!,$$

on K és una constant, i aleshores busquem una solució particular $D(m) = K(m) m!$ de l'equació completa:

$$K(m+1)(m+1)! = (m+1)K(m)m! + 1 \Rightarrow K(m+1) - K(m) = \frac{1}{(m+1)!}$$

$$\Rightarrow K(m) = \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} + \alpha \Rightarrow D(m) = m! \left(\sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} + \alpha \right),$$

on α és una constant. Finalment, $C(1) = D(1) = 2$ dona $\alpha = 1$, de manera que $C(m) \leq \lfloor m!e \rfloor$.

En els exemples que hem esmentat al començament d'aquesta secció, hem vist que $51 \leq R(3, 3, 3, 3) \leq 62$. Emprant (7), obtenim que

$$R(3, 3, 3, 3) = C(4) + 1 \leq \lfloor 4!e \rfloor + 1 = 66,$$

cosa que representa una bona fita superior, no molt distant de la millor fita coneguda.

4 Amics en comú: distància-regularitat i teoria de codis

Com diuen Aigner i Ziegler [1], ningú no sap qui va ser el primer en donar el resultat següent amb un toc humà:

- *Si en una festa amb tres persones o més, cada dues tenen exactament un amic en comú, aleshores hi ha almenys una persona (el «polític») que és amiga de tothom.*

Actualment, aquest resultat es coneix amb el nom de *teorema de l'amistat*. Com s'ha dit en la introducció, el 1966 Erdős, Rényi i Sós [11] van donar la primera demostració (per reducció a l'absurd) i es considera la més famosa. Bàsicament, té dues parts: primer es demostra que si el graf G , que modelitza aquesta festa on cada aresta representa l'amistat entre dues persones, és un contraexemple amb més de tres vèrtexs, aleshores ha de ser regular, diguem-ne de grau k . Com a conseqüència, G ha de ser fortament regular amb paràmetres $(n, k; 1, 1)$, és a dir, cada dos vèrtexs adjacents tenen exactament un veí comú i el mateix passa per a cada dos vèrtexs no adjacents. Després, s'utilitza la teoria espectral de grafes per demostrar que G no pot existir. De fet, l'hipotètic graf G seria un exemple de graf distància-regular, en aquest cas amb diàmetre dos (en els grafes connexos de diàmetre 2 els conceptes de fortament regular i distància-regular coincideixen). Diem que un graf és *distància-regular* si, quan és observat o «penjat» d'un dels seus vèrtexs, obtenim una partició del conjunt de vèrtexs en capes, de manera que la capa i conté els vèrtexs a distància i d'un vèrtex donat i els vèrtexs en una capa són indistingibles entre ells respecte de les seves adjacències. Una definició més precisa és la següent: un graf G amb diàmetre D és distància-regular si, per a cada parell de vèrtexs u, v i donats uns nombres enters $0 \leq i, j \leq D$, el nombre $p_{ij}(u, v)$ de vèrtexs a distància i del vèrtex u i a distància j del vèrtex v només depèn de $k := \text{dist}(u, v)$. Aleshores escrivim $p_{ij}(u, v) = p_{ij}^k$ per a unes constants p_{ij}^k , anomenades *nombres d'intersecció*. De fet, com que es compleixen moltes relacions entre aquests nombres, és possible donar una definició molt més senzilla, perquè per a cada distància k només ens calen els parells de distàncies $(i, j) = (k - 1, 1), (k, 1)$ i $(k + 1, 1)$. Els nombres d'intersecció corresponents són suficients per determinar tots els altres; vegeu, per exemple, Biggs [4]. Aleshores, la definició més usual de distància-regularitat és: un graf G és distància-regular si, per a cada parell de vèrtexs u, v tals que $\text{dist}(u, v) = k$, els nombres c_k, a_k i b_k de vèrtexs adjacents a v i a distància $k - 1, k$ i $k + 1$, respectivament, del vèrtex u només depenen de k , de manera

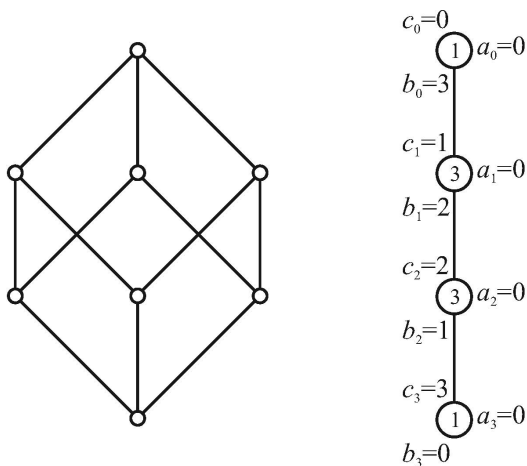


FIGURA 15: Una partició en capes del graf del cub Q i el seu diagrama d'intersecció.

que $c_k = p_{k-1,1}^k$, $a_k = p_{k,1}^k$ i $b_k = p_{k+1,1}^k$. Com a exemples simples de grafs distància-regulars, tenim els esquelets dels políedres regulars; vegeu de nou la figura 1. A la figura 15, il·lustrem el cas de la partició en capes del graf del cub juntament amb l'anomenat *diagrama d'intersecció* dels corresponents nombres d'intersecció. Noteu que cada capa es representa per un cercle amb el nombre de vèrtexs que conté.

Des de la seva definició, feta per Biggs al començament dels anys setanta, els grafs distància-regulars i la seva principal generalització, anomenada *esquemes d'associació* (vegeu Brouwer i Haemers [8]), han estat conceptes clau en combinatòria algebraica. Aquests grafs tenen relació amb altres àrees de la matemàtica, com la geometria, la teoria de codis, la teoria de grups, la teoria de dissenys i altres parts de la teoria de grafs. Com van assenyalar Brouwer, Cohen i Neumaier en el seu monumental llibre sobre aquest tema [7], això és perquè la majoria d'objectes finits amb «prou» regularitat estan relacionats amb els grafs distància-regulars.

Una caracterització quasiespectral d'aquests grafs feta per Fiol i Garriga [20, 18] és la següent:

- Un graf regular G amb matriu d'adjacència A i $d+1$ valors propis diferents és distància-regular si i només si el nombre $|\Gamma_d(u)|$ de vèrtexs a distància d del vèrtex u és una constant i només depèn de l'espectre de la matriu A .

Més concretament, considerem un graf regular G amb n vèrtexs i espectre $\text{sp } G = \{\lambda_0^1, \lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_d^{m_d}\}$, on $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d$ són els valors propis de la matriu A i els superíndexs denoten les seves multiplicitats; λ_0 és simple perquè G és connex i, per tant, A és irreductible (teorema de Perron-Frobenius per a matrius

no negatives, vegeu Godsil [25, p. 31]). Aleshores, G es distància-regular si i només si es compleix que, per a tot vèrtex u ,

$$|\Gamma_d(u)| = n \left(\sum_{i=0}^d \frac{\pi_0^2}{m_i \pi_i^2} \right)^{-1}, \quad (8)$$

on π_i són paràmetres de tipus moment, els quals es poden calcular a partir de la distància entre els valors propis amb la fórmula $\pi_i = \prod_{j=0(j \neq i)}^d |\lambda_i - \lambda_j|$, per a $0 \leq i \leq d$. Com a exemples, donem l'espectre, el nombre de vèrtexs i el valor obtingut de $|\Gamma_d(u)|$ segons l'equació (8) del graf del cub Q i del graf de Petersen P (vegeu de nou les figures 15 i 10, respectivament):

- Cub: $\text{sp } Q = \{3^1, 1^3, -1^3, 3^1\}$, $n = 8$, $|\Gamma_3(u)| = 1$.
- Petersen: $\text{sp } P = \{3^1, 1^5, -2^4\}$, $n = 10$, $|\Gamma_2(u)| = 6$.

Com hem dit abans, la teoria de grafes distància-regulars té moltes aplicacions en teoria de codis. Un codi C , amb un conjunt de paraules permeses o *paraules del codi*, es pot representar com un subconjunt de vèrtexs d'un graf G que habitualment és distància-regular; vegeu Godsil [25] i Van Lint [33]. El conjunt de vèrtexs representa l'«univers» de paraules amb o sense significat que es poden rebre. A més, hi ha una aresta entre dues paraules si, amb una certa probabilitat, una es pot transformar en l'altra en el procés de transmissió. Aleshores, com més curta és la distància entre dues paraules en G , més semblants són. Si una paraula del codi no ha sofert molts canvis, la paraula resultant no és lluny de la paraula original i és possible recuperar-la (criteri de decisió per proximitat). Aleshores, un codi és millor si les paraules que el constitueixen són lluny entre si. En l'estudi i disseny de bons codis, s'utilitzen algunes tècniques algebraïques per obtenir informació sobre l'estructura del graf G i, en particular, sobre el subconjunt de vèrtexs C que representa el codi. En les aplicacions d'especial importància hi ha els anomenats *codis completament regulars*, els grafes dels quals estan estructurats en una mena de distància-regularitat al voltant del conjunt que constitueix el codi. Aleshores, aquests codis es poden caracteritzar algebraicament d'una manera similar a la caracterització dels grafes distància-regulars a través del seu espectre; vegeu Fiol i Garriga [21] per a més informació.

5 Casaments: els teoremes de Hall i de Menger. Xarxes multibús

Imaginem dos grups de persones heterosexuales disposades a casar-se, l'un de dones i l'altre d'homes, el segon almenys tan gran com el primer. Imaginem també que cada dona coneix un cert nombre d'homes. El teorema de les noces de Hall dóna les condicions necessàries i suficients perquè cada dona pugui casar-se amb un dels homes que coneix:

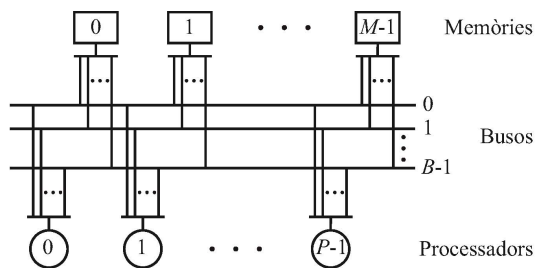


FIGURA 16: L'esquema d'interconnexió multibús complet.

- Un aparellament complet és possible si i només si qualsevol grup de dones, independentment del seu nombre, coneix almenys un nombre igual d'homes.

Curiosament, el teorema de Hall està molt relacionat amb un altre resultat clàssic de la teoria de grafs: el teorema de Menger; vegeu, per exemple, Bollobás [6]. Com en el cas del teorema de Hall, el teorema de Menger afirma que una certa condició, la qual és trivialment necessària perquè un resultat sigui cert, és també suficient. En aquest cas, el resultat no és sobre aparellaments, sinó sobre la connectivitat (de vèrtexs κ (o la connectivitat d'arestes λ) d'un graf G , la qual es defineix com la cardinalitat mínima d'un conjunt de vèrtexs (o d'arestes) l'eliminació del qual desconnecta el graf o, en particular, dos vèrtexs donats u, v . A aquest conjunt se l'anomena *conjunt de tall* o *conjunt separador* de G o, en particular, de (u, v) . Aleshores, el teorema de Menger afirma que, per a cada parell de vèrtexs u, v (no adjacents, si calculem κ):

- La mida mínima, $\kappa(u, v)$, d'un conjunt separador de vèrtexs de (u, v) és igual al nombre màxim de camins independents en vèrtexs de u a v .
- La mida mínima, $\lambda(u, v)$, d'un conjunt separador de arestes de (u, v) és igual al nombre màxim de camins independents en arestes de u a v .

S'ha demostrat que la connectivitat $\kappa = \min_{u,v \in V} \kappa(u, v)$ (o la connectivitat d'arestes $\lambda = \min_{u,v \in V} \lambda(u, v)$) d'un graf o digraf $G = (V, E)$ (un digraf és un graf en el qual cada aresta té associada una direcció) assoleix el seu valor màxim, el qual és igual al seu grau mínim, si el seu diàmetre és prou petit respecte del seu coll (vegeu Fàbrega i Fiol [14]) o si el seu nombre de vèrtexs és prou gran respecte del seu diàmetre (vegeu [16]).

Els dos teoremes esmentats, el de Hall i el de Menger, tenen moltes aplicacions en l'estudi i el disseny de les xarxes d'interconnexió (per exemple, entre processadors) i en xarxes de comunicació. Aquí expliquem una aplicació del teorema de Hall a l'estudi de les *xarxes d'interconnexió multibús*: un sistema multiprocessador amb memòria compartida i xarxa d'interconnexió multibús consisteix en P processadors, B busos i M mòduls de memòria amb $B \leq \min\{P, M\}$. Els processadors tenen accés als mòduls de memòria a través

dels busos, de manera que podem establir connexions processadors-busos i busos-memòries. Suposem que hi ha $m \leq M$ peticions dels processadors per accedir a diferents mòduls de memòria. Com que cada connexió processador-memòria requereix un bus, si $m \leq B$ es podran establir m connexions; en canvi, si $m > B$, aleshores només podrem tenir B connexions. En l'esquema complet (vegeu la figura 16), cada bus es connecta a totes les memòries i a tots els processadors. Això representa $B(P + M)$ connexions i, normalment, és un estalvi important respecte a la xarxa *creuada* (*crossbar*) amb PM connexions, una connexió entre cada parell processador-memòria. Això s'explica perquè el nombre de busos és normalment molt més petit que el nombre de processadors i de memòries. Per exemple, si $M = N$ (una situació comuna), l'estalvi esmentat es produeix quan $B < M/2$.

Com que el cost de la xarxa depèn bàsicament del nombre de connexions, considerem la redundància d'aquest esquema, és a dir: quin és el nombre màxim de connexions (processador-bus o bus-memòria) que es poden eliminar sense que el sistema es degradi? En altres paraules, *quantes connexions, d'entre el total $B(P + M)$, podem eliminar sense que qualsevol dels $m \leq B$ processadors que hagin demanat accés a m mòduls de memòria diferents deixi d'accedir-hi?* La resposta és una conseqüència directa del resultat següent:

- *En un sistema multiprocessador amb xarxa multibús que no es degradi, cada bus pot estar desconnectat de, en conjunt, com a màxim $B - 1$ processadors o mòduls de memòria.*

La demostració és com segueix: per a cada bus i , $0 \leq i \leq B - 1$, siguin p_i i m_i , respectivament, el nombre de processadors i de memòries que té connectats. Anàlogament, siguin \bar{p}_i i \bar{m}_i els corresponents nombres de processadors i memòries desconnectats. Evidentment, $p_i + \bar{p}_i = P$ i $m_i + \bar{m}_i = M$. El resultat anterior afirma que, en un sistema que no es degrada, cada bus i es pot desconnectar de, com a màxim, $B - 1$ processadors o memòries, és a dir, $\bar{p}_i + \bar{m}_i \leq B - 1$ per a $0 \leq i \leq B - 1$. De manera equivalent, podem dir que cada bus ha de tenir més de $P + M - B$ connexions, de manera que $p_i + m_i > P + M - B$ per a $0 \leq i \leq B - 1$. Suposem que, al contrari, per a cada bus i , tenim $\bar{p}_i + \bar{m}_i \geq B$. Siguin k_1, k_2, \dots, k_y amb $y \leq \bar{p}_i \leq P$ i j_1, j_2, \dots, j_x amb $x \leq \bar{m}_i \leq M$, respectivament, els processadors i les memòries no connectades al bus i . Notem que $x + y = B$. Considerem ara x altres processadors $k_{y+1}, k_{y+2}, \dots, k_{y+x}$ i y

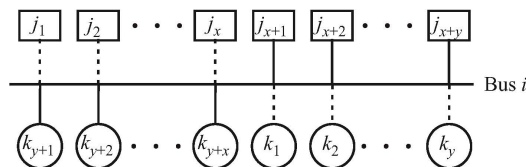


FIGURA 17: Part d'un sistema que es degrada.

altres memòries $j_{x+1}, j_{x+2}, \dots, j_{x+y}$, com a la figura 17. Sigui (k, j) la demanda del processador k per accedir a la memòria j . Cap de les B demandes

$$(k_1, j_{x+1}), (k_2, j_{x+2}), \dots, (k_y, j_{x+y}), (k_{y+1}, j_1), (k_{y+2}, j_2), \dots, (k_{y+x}, j_x)$$

no pot utilitzar el bus i i això significa que el sistema es degrada.

Esquema ròmbic

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
							7	7	7	7	7	7	7	7	7
						6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
					5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
				4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
			3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TAULA 2: Representació matricial de l'esquema *ròmbic* amb $M = 16$ i $B = 8$ (les components indiquen els busos connectats a mòduls de memòria).

Esquema d'escala

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
							7	7	7	7	7	7	7	7	7
						6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
					5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
				4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
			3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TAULA 3: Representació matricial de l'esquema *d'escala* amb $M = 16$ i $B = 8$ (les components indiquen els busos connectats a mòduls de memòria).

Per tant, concloem que, com hem dit abans, el nombre màxim de connexions redundants és $B(B - 1)$. De fet, aquest valor s'assoleix amb les anomenades *topologies mínimes* com, per exemple, la topologia *ròmbica* (taula 2) i la *d'escala* (taula 3). Es poden trobar més detalls a Fiol, Valero, Yebra i Lang [23] i a Lang, Valero i Fiol [32].

Notem que el resultat anterior només dona condicions necessàries perquè no hi hagi degradació. En aquest context, el teorema de Hall dona una caracte-

rització de les topologies d'interconnexió que eviten la degradació del sistema, com en el cas esmentat de les topologies completa i mínima:

- *Un sistema multibús no pateix degradació si i només si qualsevol conjunt de $p \leq B$ parells disjunts de processador-memòria estan connectats a un conjunt d'almenys p busos.*

Com hem esmentat, aquest resultat dona les condicions necessàries i suficients perquè un sistema multibús no es degradi.

Agraïments

Agraïm als professors J. L. A. YEBRA i E. GARRIGA els seus comentaris i suggeriments sobre el contingut d'aquest article i a l'escriptora ISABEL-CLARA SIMÓ la seva acurada revisió lingüística. Agraïm també el suport del projecte MTM2008-06620-C03-01 del Ministeri de Ciència i Educació i l'European Regional Development Fund i del projecte 2009SGR1387 del Consell Interdepartamental de Recerca i Innovació Tecnològica (CIRIT) de la Generalitat de Catalunya.

Referències

- [1] AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. *Proofs from the book*. Berlín: Springer, 1998.
- [2] APPLE, K. «An attempt to understand the four color problem». *J. Graph Theory*, 1 (1977), 193–206.
- [3] APPLE, K.; HAKEN, W.; KOCH, J. «Every planar map is four colorable». *Illinois J. Math.*, 21 (1977), 429–567.
- [4] BIGGS, N. L. *Algebraic graph theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [5] BIGGS, N. L.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. *Graph theory: 1736-1936*. Oxford: Clarendon Press, 1976.
- [6] BOLLOBÁS, B. *Graph theory: An introductory course*. Nova York: Springer, 1979. [3a ed. corr., 1990]
- [7] BROUWER, A. E.; COHEN, A. M.; NEUMAIER, A. *Distance-regular graphs*. Berlín: Springer, 1989.
- [8] BROUWER, A. E.; HAEMERS, W. H. «Association schemes», a GRAHAM, R. L. et al. [ed.]. *Handbook of combinatorics*. Vol. 1-2. Amsterdam: Elsevier (North-Holland), 1995, 747–771.
- [9] CARROLL, L. *The hunting of the snark*. Anotat per M. Gardner. Nova York: Penguin Books, 1974.
- [10] DIESTEL, R. *Graph theory*. Nova York: Springer, 1997.
- [11] ERDŐS, P.; RÉNYI, A.; SÓS, V. «On a problem of graph theory». *Studia Sci. Math.*, 1 (1966), 215–235.

- [12] EULER, L. «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis». *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*. Tom 8, 1741, 128-140.
- [13] EULER, L. «Elementa doctrinae solidorum». *Novi Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*. Tom 4, 1752-1753, 109-160.
- [14] FÀBREGA, J.; FIOL, M. A. «Maximally connected digraphs». *J. Graph Theory*, 13 (1989), 657-668.
- [15] FIOL, M. A. «A Boolean algebra approach to the construction of snarks», a ALAVI, Y.; CHARTRAND, G.; OELLERMANN, O. R.; SCHWENK, A. J. [ed.]. *Graph theory, combinatorics, and applications*. Vol. 1. Nova York: John Wiley & Sons, 1991, 493-524.
- [16] FIOL, M. A. «The connectivity of large digraphs and graphs». *J. Graph Theory*, 17 (1993), 31-45.
- [17] FIOL, M. A. « c -Critical graphs with maximum degree three», a ALAVI, Y.; SCHWENK, A. J. [ed.]. *Graph theory, combinatorics, and applications*. Vol. 1. Nova York: John Wiley & Sons, 1995, 403-411.
- [18] FIOL, M. A. «Algebraic characterizations of distance-regular graphs». *Discrete Math.*, 246 (2002), núm. 1-3, 111-129.
- [19] FIOL, M. A.; FIOL, M. L. «Coloracions: un nou concepte dintre la teoria de coloració de grafs». *L'Escaire*, 11 (1984), 33-44.
- [20] FIOL, M. A.; GARRIGA, E. «From local adjacency polynomials to locally pseudo-distance-regular graphs». *J. Combin. Theory Ser. B*, 71 (1997), 162-183.
- [21] FIOL, M. A.; GARRIGA, E. «On the algebraic theory of pseudo-distance-regularity around a set». *Linear Algebra Appl.*, 298 (1999), núm. 1-3, 115-141.
- [22] FIOL, M. A.; GARRIGA, E.; YEBRA, J. L. A. «Avoiding monocoloured triangles when colouring K_n ». Article de recerca. Universitat Politècnica de Catalunya, 1995.
- [23] FIOL, M. A.; VALERO, M.; YEBRA, J. L. A.; LANG, T. «Reduced interconnection networks based on the multiple bus for multimicroprocessor systems». *International Journal of Mini and Microcomputers*, 6 (1984), núm. 1, 4-9.
- [24] GARDNER, M. «Mathematical games: Snarks, boojums, and other conjectures related to the four-color-map theorem». *Sci. Amer.*, 234 (1976), núm. 4, 126-130.
- [25] GODSIL, C. D. *Algebraic combinatorics*. Nova York: Chapman and Hall, 1993.
- [26] GODSIL, C. D.; ROYLE, G. *Algebraic graph theory*. Nova York: Springer, 2001.
- [27] HEAWOOD, P. J. «Map colour theorems». *Quart. J. Math.*, 24 (1890), 332-338.

- [28] HOFFMAN, P. *The man who loved only numbers: The story of Paul Erdős and the search for mathematical truth*. Nova York: Hyperion, 1998.
- [29] ISAACS, R. «Infinite families of nontrivial graphs which are not Tait colorable». *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975), núm. 3, 221–239.
- [30] ISAACS, R. «Loupekhine's snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs». Technical Report, Dept. of Math Sci., Johns Hopkins University, 263 (1976).
- [31] KURATOWSKI, C. «Sur le problème des courbes gauches en topologie». *Fund. Math.*, 15 (1930), 217–283.
- [32] LANG, T.; VALERO, M.; FIOL, M. A. «Reduction of connections for multibus organization». *IEEE Trans. Comput.*, C-32 (1983), núm. 8, 707–716.
- [33] LINT, J. H. VAN *Introduction to coding theory*. 3a ed. Berlín: Springer, 1999.
- [34] PETERSEN, J. «Sur le théorème de Tait». *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 5 (1898), 225–227.
- [35] RADEMACHER, H.; TOEPLITZ, O. *Números y figuras*. Madrid: Alianza, 1970.
- [36] RADZISZOWSKI, S. P. «Small Ramsey numbers». *Electron. J. Combin.*, 1 (2006).
- [37] ROBERTSON, N.; SANDERS, D. P.; SEYMOUR, P. D.; THOMAS R. «The four colour theorem». *J. Combin. Theory Ser. B.*, 70 (1997), 2–44.
- [38] TAIT, P. G. «Remarks on the colouring of maps». *Proc. Roy. Soc. Edimburgh*, 10 (1880), 501–503, 729.
- [39] THOMASSEN, C. «A link between the Jordan curve theorem and the Kuratowski planarity criterion». *Amer. Math. Monthly*, 97 (1990), 216–218.
- [40] WEST, D. B. *Introduction to graph theory*. 2a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2000.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA IV
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
JORDI GIRONA, 1-3, EDIFICI C3, 08034 BARCELONA
{cda|fo, fio|}@ma4.upc.edu